Algebră 11-12

Matrice și determinanți

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ – matrice pătratică de ordinul *2* cu elemente din **R**

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ – matrice pătratică de ordinul *3* cu elemente din **R**.

$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ – urma matricii *A*

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Inversa matricei pătratice *A* este $A^{-1} = \frac{1}{detA}A^*$, unde A^* este adjuncta matricei *A*.

Rangul unei matrice este dat de cel mai mare ordin al unui minor nenul al matricii respective.

Sisteme liniare

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ – sistem liniar cu *m* ecuații și *n* necunoscute.

$b_1, b_2, \dots, b_m$ – termenii liberi

Un sistem liniar este omogen dacă toți termenii liberi sunt nuli.

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1;m} \\ j=\overline{1;n}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathbf{R})$ – matrice cu *m* linii și *n* coloane (matricea sistemului)

$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ – matricea extinsă a sistemului. $A^t = (a_{ji})_{\substack{i=\overline{1;m} \\ j=\overline{1;n}}} \in M_{nm}(\mathbf{R})$ – transpusa matricii *A*.

Un sistem liniar poate fi:

- Compatibil determinat (are soluție unică)
- Compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții)
- Incompatibil (nu are soluții)

Un sistem liniar cu *n* ecuații și *n* necunoscute care are determinantul matricei nenul este compatibil determinat, în caz contrar este compatibil nedeterminat sau incompatibil.

Un sistem cu *n* ecuații și *n* necunoscute și cu matricea sistemului nesingulară ($detA \neq 0$) se numește sistem de tip Cramer. Un sistem de tip Cramer este compatibil determinat și are soluția:

$x_1 = \frac{d_1}{detA}, x_2 = \frac{d_2}{detA}, \dots, x_n = \frac{d_n}{detA}$, unde d_k $(k = \overline{1;n})$ este determinantul care se obține prin înlocuirea coloanei *k* cu coloana termenilor liberi.

Teorema Kronecker-Capelli: Un sistem este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang}A = \text{rang}\bar{A}$.
Teorema lui Rouche: Un sistem este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt nuli.

Legi de compoziție. Proprietăți.

Fie M o mulțime nevidă și „*” o lege de compoziție pe mulțimea M.

- Asociativitatea: $\forall x, y, z \in M \Rightarrow x * (y * z) = (x * y) * z$
- Comutativitatea: $\forall x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x$
- Element neutru: $e \in M$ este element neutru dacă $x * e = e * x = x, \forall x \in M$
- Element simetrizabil: $x \in M$ se numește element simetrizabil dacă $\exists x' \in M$ a.î. $x * x' = x' * x = e$.

Fie „*” și „∘” două legi de compoziție pe aceeași mulțime M.

- Spunem că operația „*” este **distributivă la stânga** față de operația „∘” dacă $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in M$
- Spunem că operația „*” este **distributivă la dreapta** față de operația „∘” dacă $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x), \forall x, y, z \in M$
- Spunem că operația „*” este **distributivă** față de operația „∘” dacă este distributivă la stânga și la dreapta.

Grupuri. O mulțime nevidă G împreună cu o lege de compoziție $*: G \times G \to G$ se numește grup dacă operația „*” este asociativă, comutativă și admite element neutru. Dacă în plus legea de compoziție este comutativă, spunem că $(G,*)$ este grup comutativ sau grup abelian.

- Fie $(G,\circ)$ și $(G',*)$ două grupuri. O funcție $f: G \to G'$ se numește morfism de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G$. Dacă, în plus, morfismul este bijectiv atunci el se numește izomorfism de grupuri și se notează $G \simeq G'$.
- Fie $(G,\circ)$ și $(G',*)$ două grupuri cu elementele neutre *e* și *e*’ și un morfism $f: G \to G'$. Atunci:
  1) $f(e) = e'$
  2) $f(x') = \left(f(x)\right)', \forall x \in G$

Inele și corpuri

Se numește **inel** un triplet (I, +, ·) în care I este o mulțime nevidă, iar „+” și „·” sunt două legi de compoziție numite „adunare” respective „înmulțire” și care satisfac următoarele condiții:

a) (I, +) este grup abelian
b) Înmulțirea este asociativă
c) Înmulțirea are element neutru
d) Înmulțirea este distributivă față de adunare (la stânga și la dreapta)

Inelul (I, +, ·) este comutativ dacă operația „·” este comutativă.

Un triplet (K, +, ·) se numește **corp** dacă satisface următoarele proprietăți:

a) (K, +, ·) este inel
b) 0≠1 (inelul are cel puțin două elemente)
c) Orice element din $K \setminus \{0\}$ este inversabil.

Polinoame.

Forma algebrică a unui polinom de gradul *n*: $f = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$

Valoarea polinomului în α este $f(\alpha)$. Dacă $f(\alpha) = 0$ atunci α se numește rădăcină a polinomului *f*.

Teorema restului: restul împărțirii lui *f* la $X - a$ este $f(a)$.

Teorema lui Bezout: $(X - a)|f \Leftrightarrow f(a) = 0$

- Fie $f \in K[X]$. Spunem că $\alpha \in K$ este rădăcină de ordinul $p \in \mathbf{N}^*$ a polinomului f dacă și numai dacă $(X-\alpha)^p|f$ și $(X-\alpha)^{p+1}$ nu divide pe *f*.
- Fie $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$. Următoarele afirmații sunt echivalente:
  1) α este rădăcină de ordinul *p* pentru *f*
  2) $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$ și $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$

Relațiile lui Viete pentru ecuația de gradul III

Dacă $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3 atunci avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Relațiile lui Viete pentru ecuația de gradul IV

Dacă $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 atunci avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

- Fie $f \in \mathbf{R}[X],\ f \neq 0$. Dacă x_0 este rădăcină complexă de ordinul *p* a polinomului *f*, atunci $\overline{x_0}$ este rădăcină complexă de ordinul *p* a polinomului *f*.($\overline{x_0}$ este conjugatul lui x_0)
- Fie $f \in \mathbf{Q}[X],\ f \neq 0$. Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}, a, b \in \mathbf{Q}, b > 0, \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$ este rădăcină de ordinul *p* a polinomului *f*, atunci $\overline{x_0} = a - \sqrt{b}$ este rădăcină de ordinul *p* a polinomului *f*.
- Fie $f = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbf{Z}[X], a_0 \neq 0$. Dacă $x_0 = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1$ este rădăcină rațională a polinomului *f*, atunci $p|a_n$ și $q|a_0$. În particular, dacă $x_0 \in \mathbf{Z}$, atunci $x_0|a_n$.

Ecuații binome.

O ecuație algebrică de forma $x^n = a$, unde $a \in \boldsymbol{C}^*, n \geq 2$, se numește ecuație binomă.

Rădăcinile ecuației sunt: $z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), k = \overline{0; n-1}$